

## билет 8

### Точечные оценки и требования к ним

**Точечной оценкой**  $\hat{\theta}$  называют некоторую вектор – функцию результатов наблюдения  $\tilde{\theta}(x_1, \dots, x_n)$ , значения компонент которой принимают за наилучшее приближение, в данных условиях, к значениям компонент вектора  $\theta$  параметров генеральной совокупности.

#### Свойства оценок

1. Оценка  $\hat{\theta}$  параметра  $\theta$  называется **состоятельной**, если она удовлетворяет закону больших чисел, т. е. сходится по вероятности к оцениваемому параметру:

$$\lim P\{|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon\} = 1 \text{ или } \hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta$$

2. Оценка  $\hat{\theta}$  параметра  $\theta$  называется **несмещенной**, если ее математическое ожидание равно оцениваемому параметру, т. е. если выполняется равенство

$$M(\hat{\theta}) = \theta.$$

Если данное равенство не выполняется, то оценку будут называть смещенной.

3. Несмещенная оценка  $\hat{\theta}$  параметра  $\theta$  называется **эффективной**, если она имеет наименьшую дисперсию среди всех возможных несмещенных оценок параметра  $\theta$ , вычисленных по выборкам одного и того же объема  $n$ .

$$D(\hat{\theta}_{\text{эф}}) \rightarrow \min.$$

11

### Метод максимального правдоподобия

#### ▼ Способ 1

Пусть необходимо найти при помощи метода максимального правдоподобия оценку заданного параметра  $p$  биномиального распределения

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

если в  $n_1$  независимых испытаниях некоторое событие  $A$  появлялось  $m_1$  раз, а в  $n_2 - m_2$  раз. Для того, чтобы решить данную задачу, необходимо составить функцию правдоподобия:

$$L = P_{n_1}(m_1) \cdot P_{n_2}(m_2) = C_{n_1}^{m_1} \cdot C_{n_2}^{m_2} \cdot p^{m_1+m_2} \cdot (1-p)^{[(n_1+n_2)-(m_1+m_2)]}$$

Затем следует отыскать логарифмическую функцию

$$\ln L = \ln(C_{n_1}^{m_1} \cdot C_{n_2}^{m_2}) + (m_1 + m_2) \cdot \ln p + ((n_1 + n_2) - (m_1 + m_2)) \cdot \ln(1-p)$$

На следующем этапе определяется первая производная  $p$ :

$$\frac{d \ln L}{dp} = \frac{m_1 + m_2}{p} - \frac{(n_1 + n_2) - (m_1 + m_2)}{1-p}.$$

Найденную производную необходимо приравнять к нулю, тем самым записав уравнение правдоподобия

$$\frac{m_1 + m_2}{p} - \frac{(n_1 + n_2) - (m_1 + m_2)}{1-p} = 0$$

После относительного решения полученного уравнения находим значение критической точки:

$$p = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}.$$

В данной точке вторая производная будет отрицательной, а, следовательно, данная точка является максимумом. Таким образом найденная точка принимается в качестве оценки по методу максимального правдоподобия неизвестной вероятности  $p$  биномиального распределения

#### ▼ Способ 2

Известен закон распределения случайных величин, зависящий от набора параметров.

Оценки этих параметров подбираются таким образом, чтобы вероятность получить имеющийся набор данных была максимальной.

$$L(\theta) = P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n | \theta) \rightarrow \max$$

– для дискретных случайных величин,

$$L(\theta) = f(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n | \theta) \rightarrow \max$$

– для непрерывных случайных величин.

