



Предельные теоремы

▼ Предельные теоремы

▼ Неравенство Чебышева

- Вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ϵ , не меньше, чем $1 - D(X)/\epsilon^2$:

$$P(|X - M(X)| < \epsilon) \geq 1 - D(X)/\epsilon^2.$$

▼ Теорема Чебышева

- Если $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ - попарно независимые случайные величины, причем дисперсии их равномерно ограничены (не превышают постоянного числа C), но, как бы мало ни было положительное число ϵ , вероятность неравенства

$$\left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)}{n} \right| < \epsilon$$

будет как угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико.

- Если $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ - попарно независимые случайные величины, имеющие одно и то же математическое ожидание a , и если дисперсии этих величин равномерно ограничены, то, как бы мало ни было число $\epsilon > 0$, вероятность неравенства

$$\left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - a \right| < \varepsilon$$

будет как угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико

▼ Теорема Бернулли

- Если в каждом из n независимых испытаний вероятность p появления события A постоянна, то как угодно близка к единице вероятность того, что отклонение относительной частоты от вероятности p по абсолютной величине будет сколь угодно малым, если число испытаний достаточно велико

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|m/n - p| < \varepsilon) = 1.$$

▼ Закон больших чисел

- Под законом больших чисел не следует понимать какой-то один общий закон, связанный с большими числами. Закон больших чисел - это обобщенное название нескольких теорем, из которых следует, что при неограниченном увеличении числа испытаний средние величины стремятся к некоторым постоянным.
- К ним относятся теоремы Чебышева и Бернулли. Теорема Чебышева является наиболее общим законом больших чисел, теорема Бернулли - простейшим.
- В основе доказательства теорем, объединенных термином "закон больших чисел", лежит неравенство Чебышева, по которому устанавливается вероятность отклонения от ее математического ожидания:

$$P\{|X - M[X]| < \xi\} \geq 1 - \frac{D[X]}{\xi^2}.$$

▼ Центральная предельная теорема

- Если случайная величина X представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то X имеет распределение, близкое к нормальному

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \quad A_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad B_n^2 = \sum_{k=1}^n b_k^2.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\frac{S_n - A_n}{B_n} < x \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2} dz.$$

Источники

- <http://mathhelpplanet.com/static.php?p=predelnye-tyeoremy-tyeorii-veroyatnostyei>
- <http://cito-web.yspu.org/link1/metod/theory/node21.html>