



Независимость случайных событий

Если производится несколько испытаний, причем вероятность события А в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют **независимыми относительно события А**.

Два случайных события называются **независимыми**, если наступление одного из них не изменяет вероятность наступления другого.

Схема Бернулли - ситуации, в которых одно и тоже испытание повторяется многократно и исход каждого испытания независим от исходов других.

▼ Формула Бернулли

Пусть в результате испытания возможны **два исхода**: либо появится событие А либо противоположное ему событие. Проведем n испытаний Бернулли. Это означает, что все n испытаний независимы; вероятность появления события А в каждом отдельно взятом или единичном испытании постоянна и от испытания к испытанию не изменяется (т.е. испытания проводятся в одинаковых условиях). Обозначим вероятность появления события А в единичном испытании буквой p , т.е. $p = P(A)$ а вероятность противоположного события (событие А не наступило) - буквой

$$q = P(A^c) = 1 - p$$

Тогда вероятность того, что событие А появится в этих n испытаниях ровно k раз, выражается **формулой Бернулли**:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \quad q = 1 - p.$$

▼ Приближенные вычисления в схеме Бернулли

При больших значениях n пользоваться формулой Бернулли несколько сложно, так как значения становятся все больше и больше, а использование табличных данных влечет за собой накопление большого количества погрешностей.

▼ Локальная теорема Лапласа

- Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A появится в n испытаниях ровно k раз, приближенно равна (тем точнее, чем больше n) значению функции

$$y = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$$

при $x = (k - np)/\sqrt{npq}$

- Итак, вероятность того, что событие A появится в n независимых испытаниях ровно k раз, приближенно равна

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

при $x = (k - np)/\sqrt{npq}$

▼ Интегральная теорема Лапласа

- Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие A появится в n испытаниях от k_1 до k_2 раз, приближенно равна определенному интегралу

$$P_n(k_1, k_2) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-z^2/2} dz,$$

где $x' = (k_1 - np)/\sqrt{npq}$ и $x'' = (k_2 - np)/\sqrt{npq}$.

- После преобразований получим:

$$P_n(k_1, k_2) \simeq \Phi(x'') - \Phi(x'),$$

где $x' = (k_1 - np)/\sqrt{npq}$ и $x'' = (k_2 - np)/\sqrt{npq}$.

▼ Отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях

- Поставим перед собой задачу найти вероятность того, что отклонение относительной частоты m/n от постоянной вероятности p по абсолютной величине не превышает заданного числа $\varepsilon > 0$

$$\left| m/n - p \right| \leq \varepsilon$$

- Путем преобразований получим

$$P(|m/n - p| \leq \varepsilon) \simeq 2\Phi(\varepsilon \sqrt{n/(pq)}).$$

Источники

- https://www.matburo.ru/tvbook_sub.php?p=par17
- https://ru.wikipedia.org/wiki/Случайное_событие
- http://mathprofi.ru/nezavisimye_ispytaniya_i_formula_bernulli.html

- Гмурман стр 57-62