



# Случайные величины

## ▼ Случайная величина

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Функцией распределения  $F(x)$  случайной величины  $X$  называется вероятность того, что случайная величина примет значение, меньшее  $x$ :

$$| F(x) = p(X < x)$$

## ▼ Свойства функции распределения

1.  $0 \leq F(x) \leq 1$  Действительно, так как функция распределения представляет собой вероятность, она может принимать только те значения, которые принимает вероятность.
2. Функция распределения является неубывающей функцией, то есть  $F(x_2) \geq F(x_1)$  при  $x_2 > x_1$ .
3. В частности, если все возможные значения  $X$  лежат на интервале  $[a, b]$ , то  $F(x) = 0$  при  $x \leq a$  и  $F(x) = 1$  при  $x \geq b$ .  
Действительно,  $X < a$  – событие невозможное, а  $X < b$  – достоверное.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

4. Вероятность того, что случайная величина примет значение из интервала  $[a, b]$ , равна разности значений функции распределения на концах интервала:

$$p(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

#### ▼ Дискретная случайная величина

- **Дискретной** называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Число значений дискретной величины может быть конечным или бесконечным.
- **Непрерывной величиной** называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.
- **Законом распределения** дискретной случайной величины называют соответствие между значениями и их вероятностями.
- **Биномиальным** называют распределение вероятностей, определяемое формулой Бернулли

$$(p + q)^n = C_n^0 p^n + C_n^1 p^{n-1} q + \dots + C_n^k p^k q^{n-k} + \dots + C_n^n q^n.$$

$X$	$n$	$n-1$	$\dots$	$k$	$\dots$	$0$
$P$	$p^n$	$n p^{n-1} q$	$\dots$	$C_n^k p^k q^{n-k}$	$\dots$	$q^n$

- **Закон распределения Пуассона** вероятностей массовых ( $n$  велико) и редких ( $p$  мало) событий.

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

где  $\lambda = n * p$ , а  $k$  количество раз, когда событие наступит

#### ▼ Примеры величин

1. Число попаданий в мишень при выстрелах (0....n)
2. Количество выпавших орлов при  $n$  бросков монетки (0....n)
3. Число очков, выпавших при бросании игральной кости (1,2,3,4,5,6)

### ▼ Абсолютно непрерывная случайная величина

- Абсолютно непрерывная случайная величина, в отличие от дискретной случайной величины, может принять любое действительное значение из некоторого промежутка ненулевой длины.
- Функция распределения задается точно так же как и у дискретной случайной величины
- Функция плотности распределения представляет собой производную функции распределения

$$f(x) = F'(x)$$

### ▼ Свойства функции плотности

1. Плотность распределения неотрицательная функция, то есть

$$\forall x \in (-\infty; \infty) f(x) \geq 0.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

2.

### ▼ Примеры

1. Рост человека
2. Диаметр детали, обрабатываемой до заданного размера
3. Дальность полета снаряда

### ▼ Числовые характеристики случайной величины

#### ▼ Математическое ожидание

- **Математическим ожиданием** дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности.
- Математическое ожидание числа появлений события в одном испытании равно вероятности этого события
- Математическое ожидание приближенно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины
- Свойства
  1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной  $M(C) = C$  (док. стр 78)
  2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания  $M(CX) = CM(X)$
  3. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий  $M(XY) = M(X) * M(Y)$
  4. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых  $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$
- Математическое ожидание  $M(X)$  числа проявлений события А в n независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании  $M(X) = np$

#### ▼ Дисперсия

- **Отклонением** называют разность между случайной величиной и ее математическим ожиданиям.
- Математическое ожидание отклонения равно 0  $M[X - M(X)] = 0$
- Дисперсией дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания  $D(X) = M[X - M(X)]^2$

- Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины  $X$  и квадратом ее математического ожидания

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

#### ▼ Свойства

1. Дисперсия постоянной величины  $C$  равна нулю

$$| \quad D(C) = 0$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат

$$| \quad D(CX) = C^2 D(X)$$

3. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин

$$| \quad D(X + Y) = D(X) + D(Y)$$

4. Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий

$$| \quad D(X - Y) = D(X) + D(Y)$$

- Дисперсия числа появлений события  $A$  в  $n$  независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность  $p$  появления события постоянна, равна произведению числа испытаний на вероятности появления и не появления события в одном испытании
- $$D(X) = npq$$

#### ▼ Мода

- Мода это числовая характеристика случайной величины, равная значению (случайной величины) с наибольшей вероятностью

#### ▼ Медиана

- **Медианой** случайной величины  $X$  называется такое ее значение, относительно которого равновероятно получение большего и меньшего значения этой случайной величины

$$| \quad P(X < MD) = P(X > MD)$$

#### ▼ Ассиметрия

- **Ассиметрия** случайной величины - величина, характеризующая степень асимметрии распределения относительно математического ожидания
- **Среднее квадратическое отклонение** дискретной случайной величины, оно же стандартное отклонение или среднее квадратичное отклонение есть корень квадратный из дисперсии:

$$| \quad \sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

- **Коэффициент асимметрии** дискретной случайной величины вычисляется по формуле:

$$| \quad As(X) = [(x_1 M(X))^3 p_1 + (x_2 M(X))^3 p_2 + \dots + (x_n M(X))^3 p_n] / \sigma^3$$

Если коэффициент асимметрии отрицателен, то либо большая часть значений случайной величины, либо мода находятся левее математического ожидания, и наоборот, если  $As(X) > 0$ , то правее.

#### ▼ Эксцесс

- **Эксцесс случайной величины**  $Ex(X)$  - величина, характеризующая степень островершинности или плосковершинности распределения, т.е. степень так называемого «выпада».
- Коэффициент эксцесса дискретной случайной величины вычисляется по формуле:

$$Ex(X) = [(x_1M(X))^{4p_1} + (x_2M(X))^{4p_2} + \dots + (x_nM(X))^{4p_n}] / \sigma^4 - 3$$

#### Источники

- <https://studfile.net/preview/434563/page:7/>
- [https://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=Дискретная\\_случайная\\_величина](https://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=Дискретная_случайная_величина)
- [http://mathprofi.ru/nepreryvnaya\\_sluchaynaya\\_velichina.html](http://mathprofi.ru/nepreryvnaya_sluchaynaya_velichina.html)
- [https://pnu.edu.ru/media/filer\\_public/5b/e6/5be6e8bd-ca3d-4560-9c5e-50bd1a519738/biderman\\_nsv.pdf](https://pnu.edu.ru/media/filer_public/5b/e6/5be6e8bd-ca3d-4560-9c5e-50bd1a519738/biderman_nsv.pdf)
- [http://cyclowiki.org/wiki/Мода\\_дискретной\\_случайной\\_величины](http://cyclowiki.org/wiki/Мода_дискретной_случайной_величины)
- <https://studfile.net/preview/6008923/>
- Гмурман 64-