

# Дифференциальное уравнение как язык математического моделирования.

<https://pandia.ru/text/79/559/29192.php>

Изучение большого круга задач естествознания, техники и механики, биологии, медицины и других отраслей научных знаний показывает, что решение многих из них сводится к **математическому моделированию** процессов в виде формулы, т. е. в виде функциональной зависимости.

Помощью уравнений, в которых кроме независимых переменных и неизвестных функций этих переменных, содержатся производные неизвестных функций (или их дифференциалы). **Такие уравнения называются дифференциальными.**

В математическое исследование любой задачи реального мира можно выделить три основных этапа:

1. построение математической модели явления;
2. изучение этой математической модели и получение решения соответствующей математической задачи;
3. приложение полученных результатов к практическому вопросу, из разрешения которого возникла данная математическая модель, и отыскание других вопросов, к которым она применима.

Область естествознания	Характеристика составления математической модели	Пример математической модели
Физика	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Установить величины, изменяющиеся в данном явлении, и выявить физические законы, связывающие их.</li> <li>2. Выбрать независимую переменную и функцию этой искомой переменной.</li> <li>3. Исходя из условий задачи, определить начальные или краевые условия.</li> <li>4. Выразить все фигурирующие в условии задачи величины через независимую переменную, искомую функцию и производные этой функции.</li> <li>5. Исходя из условий задачи и физического закона, которому подчиняется данное явление, составить дифференциальное уравнение.</li> <li>6. Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения.</li> <li>7. По начальным или краевым условиям найти частное решение.</li> <li>8. Исследовать полученное решение.</li> </ol>	<p>А) Первый закон Ньютона:</p> $x''(t) = \frac{F(t)}{m}$ <p>Б) Уравнение показательного роста и показательного убывания:</p> $f'(x) = kf(x),$ <p>где <math>k</math> – некоторая константа.</p> <p>В) Уравнение гармонического колебания:</p> $f''(t) = -\omega^2 f(t),$ <p>где <math>\omega</math> – положительная постоянная.</p> <p>Г) Метеороид:</p> $\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{gR^2}{r^2},$ <p>где <math>R</math> – радиус Земли, <math>r</math> – расстояние между центрами метеороида и Земли, <math>g</math> – ускорение свободного падения.</p>

Геометрия	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Сделать чертёж и ввести обозначения;</li> <li>2. Отделить условия. Имеющие место в произвольной точке искомой линии, от условий, выполняющихся лишь в отдельных точках;</li> <li>3. Выразить все упомянутые в задаче величины через координаты произвольной точки и через значение производной в этой точке, учитывая геометрический смысл производной;</li> <li>4. По условию задачи составить дифференциальное уравнение;</li> <li>5. Найти общее решение этого уравнения и получить из него с помощью начальных условий уравнение искомой линии.</li> </ol>	<p>Формула зеркала, собирающего все параллельные лучи в одну точку:</p> $y' = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}},$
Биология	<p>При создании математической модели используют физические закономерности, выявленные при экспериментальном изучении объекта моделирования. Так, например, математическая модель кровообращения основано на законах гидродинамики.</p>	<p>Модель хищник – жертва:</p> $\frac{dx}{dt} = (a - by)x,$ $\frac{dy}{dt} = (kx - l)y,$ <p><math>a, b, k, l</math> — положительные константы, <math>y</math> — число хищников, <math>x</math> — число жертв.</p>
Химия	<p>Сущность химических реакций сводится к разрыву связей в исходных веществах и возникновению новых связей в продуктах реакции. При этом общее число атомов каждого элемента до и после реакции остаётся постоянным.</p>	<p>Закон действующих масс:</p> $v = k \prod_{i=1}^n c_{Ai},$ <p>где <math>c_{Ai}</math> — концентрации веществ <math>Ai \quad (i = 1, \dots, n),</math></p> <p><math>k</math> — коэффициент пропорциональности.</p>

Экономика	Базовая математическая модель в области финансов формулируется в терминах стохастических процессов, приводящих, таким образом, к стохастическим дифференциальным уравнениям. Время и недостоверность являются главными элементами моделирования финансового поведения экономических агентов.	<p>Модель фондового (биржевого) ценообразования:</p> $u_t + \frac{1}{2} A^2 x^2 u_{xx} + B u_x - C u = 0,$ <p>где <math>A, B</math> и <math>C</math> — постоянные коэффициенты, связанные с характеристиками модели.</p>
Медицина	Компартментальное моделирование распространено в медицине и биологии. Согласно определению американского фармаколога и биохимика Шеппарда компартмент — это некоторое количество вещества, выделяемое в биологической системе и обладающее свойством единства, поэтому в процессах транспорта и химических преобразований его можно рассматривать как целое. Например, в качестве особых компартментов рассматривают весь кислород в легких, всю углекислоту в венозной крови, количество введенного препарата в межклеточной жидкости, запас гликогена в печени и т. п. Модели, в которых исследуемая система представляется в виде совокупности компартментов, потоков вещества между ними, а также источников и стоков всех веществ, называются компартментальными.	<p>Модель роста опухоли:</p> $u_t = f(u) - (uc)_x,$ $c_t = -g(c, u),$ <p>где <math>u</math> — концентрация опухолевых клеток, <math>c</math> — внеклеточная матрица (например, IV тип коллагена).</p>

В заключение отметим, что математическая модель является основой математически оформленной теории того или иного явления, а аппарат дифференциальных уравнений нашел большое применение в математическом моделировании.

Результативность математического моделирования подтверждена всей человеческой практикой, это сильное средство научного исследования, которое используют в каждой конкретной области науки.